

2. Variabile aleatoare.

Considerăm aplicația $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ și notăm pentru orice $x \in \mathbb{R}$,

$$(X < x) = \{e \in \Omega, X(e) < x\}.$$

Fie Ω o mulțime (mulțimea evenimentelor elementare legate de o anumită experiență) și $\mathcal{K}$, o σ -algebră de părți ale lui Ω .

Se numește *variabilă aleatoare* (relativ la $\mathcal{K}$), o aplicație $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, cu proprietatea că $\forall x \in \mathbb{R}, (X < x) \in \mathcal{K}$.

Dacă X și Y sunt variabile aleatoare definite pe același Ω , atunci se pot introduce operațiile algebrice $X \pm Y$, XY , $\frac{X}{Y}$ (dacă Y nu ia valoarea 0), ca și în cazul general al aplicațiilor definite pe o aceeași mulțime.

Dacă $\Omega \xrightarrow{X} X(\Omega) \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, atunci se poate defini operația de compunere

$$g \circ X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall e \in \Omega, (g \circ X)(e) = g(X(e)).$$

După mulțimea valorilor pe care variabilele aleatoare le pot lua, acestea se clasifică astfel:

Variabile aleatoare *discrete* – care pot lua un număr cel mult numărabil de valori; un caz particular al acestora îl constituie variabilele aleatoare *finite*, care pot lua doar un număr finit de valori;

Variabile aleatoare *continue* – care pot lua un număr nenumărabil de valori.

Dacă X este o variabilă aleatoare discretă, atunci repartiția sa de probabilitate poate fi dată punându-se în evidență probabilitățile valorilor pe care le poate lua. Acestea se așează într-un tabel

$$X \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}, \text{ unde } p_i = P(X = x_i).$$

Dacă X este o variabilă aleatoare discretă infinit numărabilă, atunci $i \in \mathbb{N}$ iar

dacă X este o variabilă aleatoare finită, atunci $i \in \{1, \dots, n\}$. În ambele cazuri, suma probabilităților din rândul al doilea este egală cu 1.

Dacă X este o variabilă aleatoare continuă, atunci distribuția sa de probabilitate va fi dată prin *densitatea* sa de repartiție.

Funcția de repartiție a unei variabile aleatoare.

Considerăm Ω , $\mathcal{K}$, $P: \mathcal{K} \rightarrow [0,1]$, $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ cu semnificațiile de până acum.

Se numește *funcție de repartiție* a variabilei aleatoare X , funcția

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1], \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = P(X < x).$$

Exemplu. Fie X variabila aleatoare finită egală cu numărul de puncte de pe fața superioară a unui zar aruncat. Să se scrie repartiția de probabilitate și să se determine funcția de repartiție a lui X .

$$X \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \right); \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{k}{6} & k < x \leq k+1 \quad k \in \{1, \dots, 5\} \\ 1 & x > 6 \end{cases}.$$

Proprietățile funcției de repartiție.

1. F este o funcție monoton crescătoare.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$;

3. În orice punct $x \in \mathbb{R}$, F este continuă la stânga. Notând $F(x-0) = \lim_{h \downarrow 0} F(x-h)$, are loc adică $F(x-0) = F(x)$.

4. $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$;

$$P(X = a) = F(a+0) - F(a), \text{ unde am notat } F(a+0) = \lim_{h \downarrow 0} F(a+h).$$

Dacă F e continuă și la dreapta pe punctul a , adică $F(a+0) = f(a)$, atunci $P(X = a) = 0$.

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a+0);$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b+0) - F(a);$$

$$P(a < X \leq b) = F(b+0) - F(a+0).$$

Densitatea de repartiție a unei variabile aleatoare continue.

Considerăm variabila aleatoare continuă $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, având funcția de repartiție F .

Se numește densitate de repartiție a lui X , o funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$, cu proprietatea că $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Din punct de vedere geometric, F este aria cuprinsă între graficul lui f și axa Ox , între $-\infty$ și x .

Dacă f este continuă pe punctul x , atunci F este derivabilă pe punctul x și $F'(x) = f(x)$.

Proprietăți ale densității de repartiție.

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1;$$

$$2. P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx,$$

$$3. P(X \geq b) = \int_b^{\infty} f(x) dx.$$

Variabilele aleatoare X și Y se numesc *independente* dacă pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ are loc următoarea condiție:

când X și Y sunt variabile aleatoare discrete, condiția este

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y);$$

când X și Y sunt variabile aleatoare continue, condiția este

$$P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y).$$

Caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare.

Valoarea medie.

Dacă X este o variabilă aleatoare discretă având repartiția de probabilitate dată prin tabelul

$$X \begin{pmatrix} x_k \\ p_k \end{pmatrix}, \quad p_k = P(X = x_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1,$$

atunci *valoarea medie* a lui X este numărul $M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ (seria din

membrul al doilea fiind presupusă absolut convergentă). Atunci când X este o variabilă aleatoare finită care poate lua n valori, atunci însumarea se face de la 1 până la n .

Dacă X este o variabilă aleatoare continuă, având densitatea de repartiție f , atunci *valoarea medie* a lui X este numărul $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$,

(integrala din membrul al doilea fiind presupusă absolut convergentă).

Proprietățile valorii medii.

1. Dacă $a \leq X \leq b$ atunci are loc și $a \leq M(X) \leq b$; $M(C) = C$.
2. $M(CX) = C M(X)$;
3. $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$;
4. Dacă X și Y sunt independente, atunci $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.

Dispersia.

Considerăm o variabilă aleatoare X , având valoarea medie $M(X) = m$.

Se numește *dispersie* a lui X , numărul $D^2(X) = M((X - m)^2)$.

Proprietățile dispersiei.

1. $D^2(X) \geq 0$; $D^2(C) = 0$;
2. $D^2(X) = M(X^2) - m^2$.
3. $D^2(CX) = C^2 \cdot D^2(X)$;
4. Dacă X și Y sunt independente, atunci $D^2(X + Y) = D^2(X) + D^2(Y)$.

Inegalitatea lui Cebîșev.

Dacă $M(X) = m$ și $D^2(X) = \sigma^2$, atunci pentru orice $a > 0$, are loc

$$P(|X - m| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}, \quad \text{sau inegalitatea echivalentă} \quad P(|X - m| < a) > 1 - \frac{\sigma^2}{a^2}.$$

3. Câteva legi uzuale de probabilitate.

1. Repartiția binomială.

Variabila aleatoare finită X urmează o repartiție binomială de parametri n și p ($n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$), dacă ea poate lua valorile $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ respectiv cu probabilitățile $P_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. X reprezintă numărul bilelor albe extrase în condițiile schemei bilei întoarse.

Dacă X urmează o repartiție binomială de parametri n și p , atunci

$$M(X) = np \quad \text{și} \quad D^2(X) = np(1-p).$$

2. Repartiția polinomială.

Variabila aleatoare finită X urmează o repartiție polinomială de

parametri $n, p_1, \dots, p_n$ ($n \in \mathbb{N}$, $p_i \in [0,1]$, $i \in \{1, \dots, n\}$), dacă ea poate lua valorile $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ respectiv cu probabilitățile P_k , egale cu coeficientul lui x^k din polinomul $(p_1x + q_1) \cdots (p_nx + q_n)$, unde am notat $q_i = 1 - p_i$.

Dacă X urmează o repartiție polinomială de parametri $n, p_1, \dots, p_n$, atunci $M(X) = p_1 + \dots + p_n$ și $D^2(X) = p_1q_1 + \dots + p_nq_n$.

În cazul particular în care $p_1 = \dots = p_n$, repartiția polinomială se reduce la cea binomială.

3. Repartiția hipergeometrică.

Variabila aleatoare finită X urmează o repartiție hipergeometrică de parametri $N, a; n, k$ (unde $N, a, n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq a \leq N$, $k \leq n \leq N$), dacă ea poate lua valorile $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ respectiv cu probabilitățile

$$P_k = \frac{C_a^k \cdot C_{N-a}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Notând $p = \frac{a}{N}$, $q = 1 - p$, valoarea medie și dispersia lui X vor fi

$$M(X) = np, \quad D^2(X) = \frac{N-n}{N-1} npq.$$

4. Distribuția Poisson (legea evenimentelor rare).

Variabila aleatoare discretă X urmează o distribuție Poisson de parametru λ ($\lambda > 0$), dacă ea poate lua valorile k , $k \in \mathbb{N}$, respectiv cu probabilitățile

$$P_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Dacă X urmează o distribuție Poisson de parametru λ , atunci

$$M(X) = \lambda, \quad D^2(X) = \lambda.$$

5. Distribuția uniformă.

Variabila aleatoare continuă X urmează o distribuție uniformă pe intervalul $[a, b]$, dacă densitatea sa de repartiție este

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pentru } x \in [a, b] \\ 0 & \text{pentru } x \notin [a, b] \end{cases}.$$

Dacă X urmează o distribuție uniformă pe $[a, b]$, atunci funcția sa de repartiție este

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{pentru } a < x < b \\ 1 & \text{pentru } x \geq b \end{cases},$$

valoarea sa medie este $M(X) = \frac{a+b}{2}$ iar dispersia sa este $D^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

6. Distribuția exponențială.

Variabila aleatoare continuă X urmează o distribuție exponențială de parametru μ , ($\mu > 0$), dacă densitatea sa de repartiție este

$$f(x) = \begin{cases} \mu \cdot e^{-\mu x} & \text{pentru } x > 0 \\ 0 & \text{pentru } x \leq 0 \end{cases}.$$

Dacă X urmează o distribuție exponențială de parametru μ , atunci funcția sa de repartiție este

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu x} & \text{pentru } x > 0 \\ 0 & \text{pentru } x \leq 0 \end{cases},$$

Valoarea sa medie este $M(X) = \frac{1}{\mu}$ iar dispersia sa este $D^2(X) = \frac{1}{\mu^2}$.

7. Distribuția normală.

Variabila aleatoare continuă X urmează o distribuție normală de parametri m și σ , $\sigma > 0$, dacă densitatea sa de repartiție este

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Se mai spune că variabila aleatoare X este de tip $N(m, \sigma)$. Graficul funcției f se numește „clopotul lui Gauss” și este simetric față de dreapta $x = m$.

Dacă X urmează o distribuție normală de parametri m și σ , atunci funcția sa de repartiție este

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(\xi-m)^2}{2\sigma^2}} d\xi,$$

valoarea sa medie este $M(X) = m$, iar dispersia sa este $D^2(X) = \sigma^2$.

Variabila aleatoare Y de tip $N(0,1)$, adică având $m = 0$, $\sigma = 1$, se numește variabila aleatoare normală *standard*. Funcția sa de repartiție este

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

iar valorile sale pentru $y \geq 0$, sunt date în tabele (între 0 și 2, din sutime în sutime, apoi pentru valori mai îndepărtate ale lui y). Pentru valorile y care nu se află în tabele, valorile lui Φ se pot aproxima prin interpolare. Pentru $y > 0$, $\Phi(-y) = 1 - \Phi(y)$. Cu ajutorul funcției Φ , se poate exprima funcția de repartiție F , a unei variabile aleatoare de tip $N(m, \sigma)$, prin relația

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

În diferite probleme de statistică, este nevoie să găsim, pentru $\alpha \in]0,1[$ dat, cuantila (valoarea) λ_α a variabilei aleatoare normale standard Y ,

pentru care $P(|Y| \geq \lambda_\alpha) = \alpha$. Deoarece $P(|Y| \geq \lambda_\alpha) = 2(1 - \Phi(\lambda_\alpha))$, rezultă că $\Phi(\lambda_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, iar din tabele se află cuantila λ_α .

8. Distribuția Hi pătrat.

Variabila aleatoare Hi pătrat cu n grade de libertate este suma $\chi^2 = X_1^2 + \dots + X_n^2$, unde $X_1, \dots, X_n$ sunt variabile aleatoare normale standard, independente. Valoarea medie $M(\chi^2) = n$ iar dispersia $D^2(\chi^2) = 2n$.

În diferite probleme de statistică, este nevoie să găsim, pentru $\alpha \in]0, 1[$ dat, cuantila (valoarea) λ_α a variabilei aleatoare χ^2 , pentru care $P(\chi^2 < \lambda_\alpha) = \alpha$. Aceste cuantile sunt date în tabele cu două intrări: liniile tabelului corespund cu diferite grade de libertate iar coloanele tabelului, - cu diferite valori ale lui α .

9. Distribuția Student.

Variabila aleatoare t (Student), cu n grade de libertate, se exprimă prin

$$t = \sqrt{n} \frac{Y}{\chi} = \sqrt{n} \frac{Y}{\sqrt{X_1^2 + \dots + X_n^2}},$$

unde unde $X_1, \dots, X_n, Y$ sunt variabile aleatoare normale standard, independente. Valoarea medie $M(t) = 0$ iar dispersia $D^2(t) = \frac{N}{N-2}$, $N > 2$.

În diferite probleme de statistică, este nevoie să găsim, pentru $p \in]0, 1[$ dat, cuantila (valoarea) t_p a variabilei aleatoare t , pentru care $P(|t| \geq t_p) = p$. Aceste cuantile sunt date în tabele cu două intrări: liniile tabelului corespund cu diferite grade de libertate iar coloanele tabelului, - cu diferite valori ale lui p .

Dependența variabilelor aleatoare.

Considerăm variabilele aleatoare $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, pentru care există $M(X)$, $M(Y)$, $M(XY)$.

Se numește *covarianță* a lui X și Y , numărul notat C_{XY} dat de relația

$$C_{XY} = M((X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))) = M(XY) - M(X) \cdot M(Y).$$

Covarianța are următoarele proprietăți:

$$C_{XX} = D^2(X);$$

Dacă X și Y sunt variabile aleatoare independente, atunci $C_{XY} = 0$;

$$C_{XY}^2 \leq D^2(X) \cdot D^2(Y).$$

Se numește *coeficient de corelație* a lui X și Y , numărul notat r_{XY} ,

Dat de relația

$$r_{XY} = \frac{C_{XY}}{D(X) \cdot D(Y)}.$$

Coeficientul de corelație are următoarele proprietăți:

- $|r_{XY}| \leq 1$;
- $|r_{XY}| = 1$ dacă și numai dacă între X și Y există o relație de dependență

funcțională, exprimată printr-o funcție de gradul I.

- Dacă X și Y sunt variabile aleatoare independente, atunci $r_{XY} = 0$.

Reciproca acestei afirmații în general nu este adevărată.

Legea numerelor mari.

Fie A un eveniment legat de o anumită experiență și fie $P(A) = p$.
Notăm cu X_n variabila aleatoare egală cu numărul de realizări ale lui A în n experiențe (X_n este o variabilă aleatoare binomială de parametri n și p , numită frecvența absolută a lui A în n experiențe). Notăm f_n , numărul

$$f_n = \frac{X_n}{n}$$

denumit frecvența relativă a lui A , în n experiențe. Are loc pentru

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|f_n - p| \geq \varepsilon) = 0 \quad \text{sau echivalent,} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|f_n - p| < \varepsilon) = 1.$$

(se spune că șirul de variabile aleatoare f_n *converge în probabilitate* către p).

Astfel, legea numerelor mari, sub forma lui Bernoulli, se enunță astfel: șirul frecvențelor relative ale unui eveniment în n experiențe converge în probabilitate către probabilitatea acelui eveniment, atunci când $n \rightarrow \infty$.

Exerciții rezolvate.

1. Știind că variabila aleatoare X are repartiția de probabilitate

$$X \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Să se scrie repartiția de probabilitate pentru variabilele aleatoare $2X$ respectiv X^2 .

$$\text{Soluție.} \quad (2X) \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}, \quad X^2 \begin{pmatrix} 25 & 100 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

2. Repartiția de probabilitate a variabilei aleatoare finite X este dată în tabelul

$$X \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & k & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

Să se determine valoarea lui k .

Soluție. Știind că suma probabilităților din rândul al doilea al tabelului trebuie să fie egală cu 1, rezultă $k = 1/4$.

3. Se aruncă două zaruri. Să se scrie funcția de repartiție a sumei punctelor obținute pe cele două zaruri.

Soluție. Fie X și Y variabilele aleatoare egale respectiv cu numărul de puncte obținut pe cele două zaruri. Fiecare din acestea variabile aleatoare poate lua valorile naturale $1, 2, \dots, 6$, respectiv cu probabilitățile $1/6$. Rezultă că $X+Y$ poate lua valorile naturale de la 2 până la 12 , cu probabilitățile specificate în următorul tabel:

$$(X+Y) \left(\begin{array}{cccccccccccc} \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{7}{36} & \frac{8}{36} & \frac{9}{36} & \frac{10}{36} & \frac{11}{36} & \frac{12}{36} \end{array} \right).$$

Funcția de repartiție a lui $X+Y$ va fi $F(z) = P(X+Y < z)$, a cărei valoare se obține adunând probabilitățile corespunzătoare valorilor sumei $X+Y$, mai mici decât z . Astfel se obține:

$$F(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 2 \\ 1/36 & 2 < z \leq 3 \\ 2/36 & 3 < z \leq 4 \\ \vdots & \vdots \\ 35/36 & 11 < z \leq 12 \\ 1 & z > 12 \end{cases}$$

4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1-cx & x \in [0, 2] \\ 0 & x \notin [0, 2] \end{cases}$. Știind

că f este densitatea de repartiție a unei variabile aleatoare X , să se afle valoarea lui c , apoi să se determine funcția de repartiție a lui X .

Soluție. Deoarece f este o densitate de repartiție, ea trebuie să satisfacă relația

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1. \text{ Dar } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^2 (1-cx) dx = 2 - 2c. \text{ Din } 2 - 2c = 1 \text{ rezultă}$$

$$c = 1/2.$$

Fie $F(x)$ funcția de repartiție a lui X . Pentru $x \leq 0$, $F(x) = 0$. Pentru

$$0 < x < 2, \quad F(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{2}t\right) dt = \frac{x(4-x)}{4}. \quad \text{Pentru } x \geq 2, \quad F(x) = 1.$$

5. Timpul de așteptare în minute la o stație de autobus este o variabilă aleatoare X , având funcția de repartiție

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x/2 & 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & 1 \leq x < 2 \\ x/4 & 2 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}.$$

Se cere: a) densitatea de repartiție a lui X ;

b) probabilitatea ca un călător să aștepte mai mult de 3 minute;

c) probabilitatea ca un călător să aștepte mai mult de 3 minute, știind că deja a așteptat un minut.

Soluție. a) În interiorul fiecăruia din intervale, F este derivabilă și densitatea de repartiție este $f(x) = F'(x)$. Rezultă că

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{dacă } x \in]0,1[\\ 1/4 & \text{dacă } x \in]2,4[\\ 0 & \text{în rest} \end{cases}.$$

Valorile lui f la capetele intervalelor este nerelevantă, în ce privește pe $F(x)$.

$$\text{b) } P(X > 3) = 1 - F(3) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

c) Notăm cu A , evenimentul $(X > 1)$. Au loc relațiile

$$P(A) = 1 - F(1) = \frac{1}{2}, \quad P_A(X > 3) = \frac{P(A \cap (X > 3))}{P(A)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

6. Să se calculeze valoarea medie și dispersia variabilei aleatoare X , egală cu numărul de puncte de pe fața superioară a unui zar aruncat.

Soluție. Repartiția de probabilitate a lui X , respectiv a lui X^2 este

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}, \quad X^2 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}, \quad M(X^2) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 36 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

$$D^2(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}.$$

7. Să se calculeze valoarea medie și dispersia variabilei aleatoare X , având densitatea de repartiție

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{dacă } 1 < x < 4 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}.$$

Soluție.
$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_1^4 x \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{7}{3},$$

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_1^4 x^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{31}{5}, \quad D^2(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \frac{32}{45}.$$

8. Știind că variabila aleatoare X are $M(X)=1$, $D^2(X)=3$, să se găsească o margine inferioară pentru probabilitatea $P(-1 < X < 3)$.

Soluție. Folosind inegalitatea lui Cebîșev, găsim

$$P(-1 < X < 3) = P(|X-1| < 2) > 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

9. Știind că timpul de servire (exprimat în ore) a unui client la o benzinărie este o variabilă aleatoare exponențială de parametru μ și că pentru servirea a 30 de clienți este nevoie în medie de 150 minute, să se determine valoarea parametrului μ .

Soluție. Se știe că valoarea medie a variabilei aleatoare exponențiale este egală

cu $\frac{1}{\mu}$. Din datele problemei rezultă că timpul mediu de servire a unui client,

exprimat în ore, este egal cu $\frac{1,5}{30} = \frac{1}{20}$. Deci $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{20}$, de unde $\mu = 20$.

10. Notând cu p probabilitatea unui eveniment într-o experiență și cu f_n frecvența sa relativă în n experiențe, să se afle de câte ori trebuie repetată experiența respectivă, pentru ca

$$P(|f_n - p| < 0,05) \geq 0,95.$$

Soluție. Deoarece $M(f_n) = p$ și $D^2(f_n) = \frac{pq}{n}$, pe baza inegalității lui

Cebîșev obținem: $P(|f_n - p| < 0,05) =$

$$= P(|f_n - M(f_n)| < 0,05) \geq 1 - \frac{D^2(f_n)}{0,05^2} = 1 - \frac{pq}{n \cdot 0,05^2} \geq 1 - \frac{1}{4 \cdot n \cdot 0,05^2} = 1 - \frac{100}{n}.$$

Rezolvând inecuația $1 - \frac{100}{n} \geq 0,95$ găsim $n \geq 2000$.

11. Se consideră perechea de variabile aleatoare dependente (X, Y) , având repartiția de probabilitate dată în tabelul de mai jos:

$Y \backslash X$	-1	1
-2	0,4	0,1
2	0,1	0,4

Să se calculeze :

- a) dispersiile lui X și Y ;
- b) covarianța lui X și Y ;
- c) dispersia lui $X+Y$.

Soluție. a) Repartițiile lui X și Y (numite și marginale) sunt

$$X \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \text{ și } Y \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Repartițiile lui X^2 respectiv Y^2 sunt $X^2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ și $Y^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Obținem $M(X) = 0$, $M(Y) = 0$, $D^2(X) = 4 - 0^2 = 4$, $D^2(Y) = 1 - 0^2 = 1$.

b) Repartiția produsului XY este $XY \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$. Rezultă că

$M(XY) = -0,4 + 1,6 = 1,2$, iar covarianța $C_{XY} = M(XY) - M(X) \cdot M(Y) = 1,2$.

c) Repartiția sumei $X+Y$ și a lui $(X+Y)^2$ este respectiv

$$(X+Y) \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix} \text{ și } (X+Y)^2 \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Rezultă că $M(X+Y) = 0$, $M((X+Y)^2) = 0,2 + 7,2 = 7,4$, $D^2(X+Y) = 7,4 - 0^2 = 7,4$.

Observație. Din acest exemplu rezultă că dacă variabilele aleatoare nu sunt independente, atunci dispersia sumei poate să difere de suma dispersiilor.

Bibliografie